1. Halmazok, halmazműveletek, nevezetes ponthalmazok

1870-es években Cantor a matematikának egy új fejezetét teremtette meg: a halmazelméletet!
Halmaz fogalma: matematikai alapfogalom

-Jelölés: *A, B, C…*

- $x \in A \Leftrightarrow$ x eleme az *A* halmaznak

Halmaz megadása:

-Az elemek felsorolásával

-Egyértelmű utasítás, meghatározás, képlet

$A = \{x | x\ 10\text{ - nél kisebb prímszám}\}$

$A = \{2,3,5,7\}$

$B = \{10\text{ - nél kisebb prímszámok}\}\quad A \neq B$

$C = \{0,1,2,2\} = \{0,1,2\}$

Nincsenek többszörösen előforduló elemek egy halmazban!
Két halmaz: akkor és csak akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemei.
Részhalmaz: *A* részhalmaza *B*-nek, ha *A* minden eleme eleme *B*-nek is, azaz ha $a \in A$, akkor $a \in B$ is teljesül.

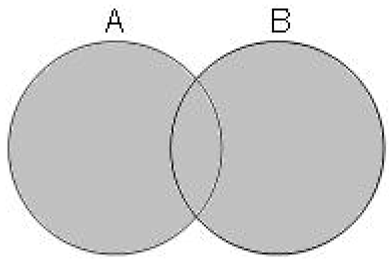
Jele: $A \subseteq B$

Valódi részhalmaz: *A* valódi részhalmaza *B*-nek, ha *A* minden egyes eleme eleme *B*-nek is, és van *B*-nek olyan eleme, amely nem eleme *A*-nak. Azaz, ha $a \in A$, akkor $a \in B$ is teljesül, de van olyan *b* elem, hogy $b \in B$, de $b \notin A$.

Jele: $A \subset B$

I. Unióképzés:

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$



Tulajdonságai

$A \cup A = A$

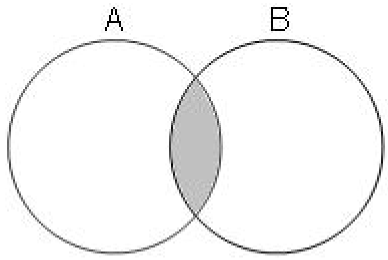
$A \cup \emptyset = A$

$A \cup B = B \cup A$ - kommutatív

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ - asszociatív

II. Metszetképzés:

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$



Tulajdonságai:

$A \cap A = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap B = B \cap A$ - kommutatív

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ - asszociatív

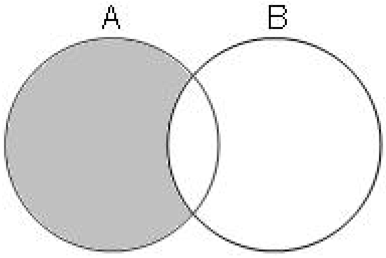
Disztributív tulajdonság:

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Az unióképzés disztributív a metszetképzésre nézve.

III. Különbségképzés:



$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$

Tulajdonságai:

$A \setminus \emptyset = A$

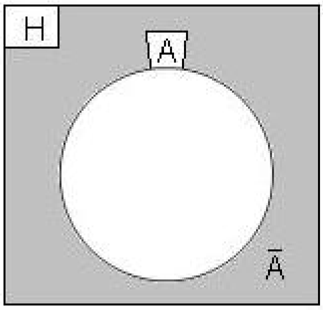
$\emptyset \setminus \mathrm{A} = \emptyset$

$A \setminus \mathrm{A} = \emptyset$

$A \setminus \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ - nem kommutatív

$(A \setminus \mathrm{B}) \setminus C \neq A \setminus (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C})$ - nem asszociatív

IV. Komplementer képzés:



H: alaphalmaz / univerzum

Ha $A \subseteq H$, akkor $\overline{A} = H \setminus \mathrm{A}$

$\overline{A} \cup A = H$

$\overline{A} \cap A = \emptyset$

$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$

de Morgan azonosságok:

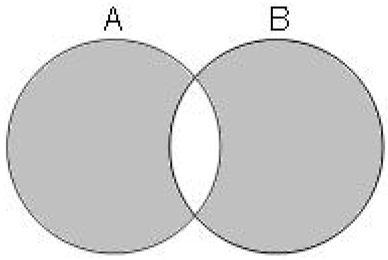
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

V. Szimmetrikus differencia-képzés:

$A \Delta B = \{x | x \text{ vagy csak } A\text{-nak, vagy csak } B\text{-nek eleme}\}$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$



Tulajdonságai:

$A \Delta A = \emptyset$

$A \Delta \emptyset = A$

$\emptyset \Delta A = A$

$A \Delta B = B \Delta A$ - kommutatív

$(A \Delta B) \Delta C = \mathrm{A} \Delta (\mathrm{B} \Delta \mathrm{C})$ - asszociatív

A részhalmazok számáról:

TÉTEL: n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma: $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

TÉTEL: n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n

1. bizonyítás:

$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ - első tétel miatt ez az összes részhalmazok száma.

2. bizonyítás:

Benne van egy elem: 1

Nincs benne: 0

0 és 1 jelekből álló sorozatot ad meg. A jelsorozatok száma $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$

3. bizonyítás: teljes indukció:

$n = 0-\text{ra}$ igaz

az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van, az üres halmaz.

$2^0 = 1$

$n = 1-\text{re}$ igaz

Egy elemű halmaznak 2 részhalmaza van, maga a halmaz és az üreshalmaz.

$2^1 = 2$
Tfh. $n = k -$ ra igaz.
Biz. be, hogy $k + 1 -$ re is igaz az állítás!
Legyen a $(k + 1)$ elemű halmaz: $A = \{a_1; a_2; .....a_k; b\}$

A *b*-t nem tartalmazó részhalmazok *k* elemű halmaz részhalmazai lesznek, ezek száma az indukciós feltétel miatt 2^k .
A *b*-t tartalmazó részhalmazokat úgy kapjuk meg, hogy az előző részhalmazok mindegyikéhez hozzávesszük *b*-t. Így ismét 2^k részhalmazt kapunk.
Összesen tehát $2^k + 2^k$ különböző részhalmazt kapunk.
$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, azaz igaz az állítás.

Ponthalmazok

Kör, kúpszeletek, szögfelező merőleges egyenes, szögfelező síkban
Szakaszfelező merőleges sík, gömb, forgáskúppalást síkkal való metszetei térben

Alkalmazások:

Binomiális tétel, Pascal-háromszög, geometriai szerkesztések a mértani hely módszerével

Koordináta geometria
$\updownarrow$
ponthalmazok egyenletekkel való azonosítása
pl.: kör: $(x - n)^2 + (y - v)^2 = r^2$ (körvonal)
$c(u; v)$ középpont, *r*: sugár

abécé
egy KRESZ-könyvben lévő jelzőtáblák halmaza
főemlősök halmaza – biológiában a rendszertanban
szőke nők halmaza: A $\qquad A \cap B = ? \qquad A \Delta B = ?$
okos nők halmaza: B $\qquad A \cup B = ?$
egyenlőtlenségek megoldásainak megadása